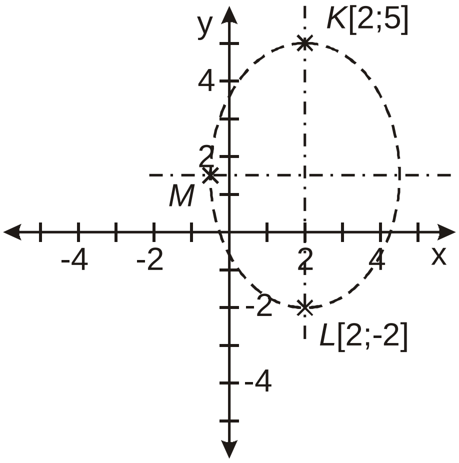
7.5.10 Hledání elips

Předpoklady: 7508

Př. 1: Najdi rovnici elipsy, která má hlavní vrcholy v bodech $K[2;5]$, $L[2;-2]$ a vedlejší vrchol v bodě $M\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Nakreslíme si obrázek:



Jde o „stojatou“ elipsu. Střed elipsy je středem úsečky $KL \Rightarrow S\left[\frac{2+2}{2};\frac{5+(-2)}{2}\right]=\left[2;\frac{3}{2}\right]$.

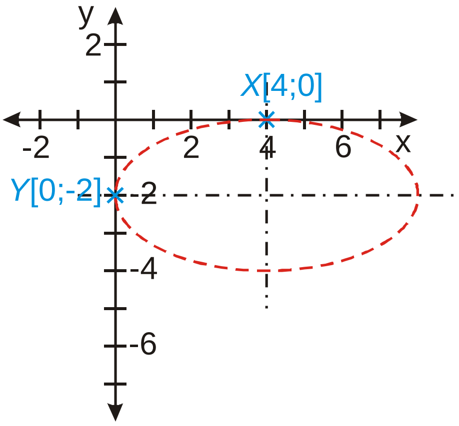
Hlavní poloosa: $b=|SK|=\frac{7}{2}$. Vedlejší poloosa: $a=|SM|=\frac{5}{2}$.

Rovnice elipsy: $\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}}=1$.

Pedagogická poznámka: Chytřejší studenti si všimnou, že není nutné střed počítat, protože jeho souřadnice jsou schované v souřadnicích zadaných bodů.

Př. 2: Napiš rovnici elipsy, která se dotýká osy x v bodě $X[4;0]$ a osy y v bodě $Y[0;-2]$.

Nakreslíme si obrázek:



Jde o „ležatou“ elipsu. Body X a Y jsou jejími vrcholy.
Střed elipsy má souřadnice $S[4;-2]$
Hlavní poloosa: $a=|SY|=4$
Vedlejší poloosa: $b=|SX|=2$
Rovnice elipsy: $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

Pedagogická poznámka: Jediný problém bývá se správným nakreslením obrázku.

Př. 3: Najdi rovnici elipsy s ohnisky v bodech $E[-1;0]$ a $F[1;0]$, která prochází bodem $X\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Urči délky jejích poloos a souřadnice jejich vrcholů.

Střed úsečky EF je středem elipsy $\Rightarrow$ $S[0;0]$ $\Rightarrow$ rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice (na dvě neznámé a, b), máme jednu (dosazení bodu X).
Výstřednost elipsy $e=|SE|=1$ $\Rightarrow$ dosadíme do vztahu mezi poloosami:
$a^2=b^2+e^2=b^2+1^2=b^2+1$.
Dosadíme do rovnice elipsy: $\frac{x^2}{b^2+1}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Dosadíme bod $X\left[1;\frac{3}{2}\right]$: $\frac{1^2}{b^2+1}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1$.

$$\frac{1}{b^2+1}+\frac{9}{4b^2}=1 \quad /(b^2+1)4b^2$$
$$4b^2+9(b^2+1)=(b^2+1)4b^2$$
$$4b^2+9b^2+9=4b^4+4b^2$$
$$4b^4-9b^2-9=0 \qquad \text{(substituce } b^2=x\text{)}$$
$$4x^2-9x-9=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot4\cdot(-9)}}{2\cdot4}=\frac{9\pm15}{8}$$

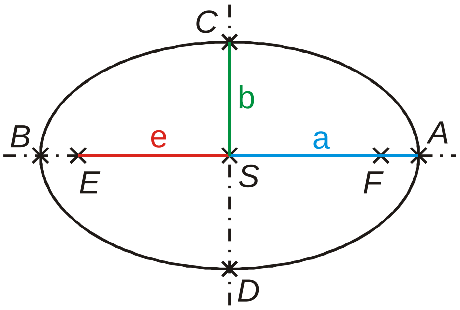
$x_1 = \frac{9+15}{8} = 3 \Rightarrow b^2 = 3$

$x_2 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = -\frac{3}{4}$ (nesmysl)

Dopočítáme hlavní poloosu $a^2 = b^2 + 1 = 3 + 1 = 4$.

Doplníme rovnici elipsy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$.

Elipsa má vodorovnou orientaci:



Hlavní vrcholy (posunuté od středu o *a* ve vodorovném směru): $A[-2;0]$, $B[2;0]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o *b* ve svislém směru): $C\left[0;-\sqrt{3}\right]$; $D\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Dodatek: Daleko rychleji můžeme příklad spočítat dosazením bodů ze zadání do vztahu $|XF| + |XE| = 2a$.

Pedagogická poznámka: Pokud někdo ze studentů navrhne postup uvedený v dodatku, pochvalte ho, ale přesto spočítejte se třídou příklad i způsobem uvedeným v učebnici. Jde o obecnější postup, používaný i v dalších příkladech.

Př. 4: (BONUS) Ověř, že pro každý bod elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ z předchozího příkladu se součet jeho vzdáleností od ohnisek $E[-1;0]$ a $F[1;0]$ rovná 4.

Rovnice elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$ hlavní vrcholy $A[-2;0]$, $B[2;0] \Rightarrow x \in \langle -2;2 \rangle$

Dokazujeme, že platí: $|XE| + |XF| = 2a$.

Dosadíme: $\sqrt{(x-e_1)^2 + (y-e_2)^2} + \sqrt{(x-f_1)^2 + (y-f_2)^2} = 2a$.

Dosadíme souřadnice bodů *E* a *F*: $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2a$.

Vypočítáme y^2 z rovnice elipsy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

Dosadíme: $\sqrt{x^2 + 2x + 1 + 3 - \frac{3}{4}x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 3 - \frac{3}{4}x^2} = 2a$.

$$\sqrt{\frac{x^2}{4} + 2x + 4} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 2x + 4} = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2} = \left|\frac{x}{2} + 2\right| + \left|\frac{x}{2} - 2\right|$$

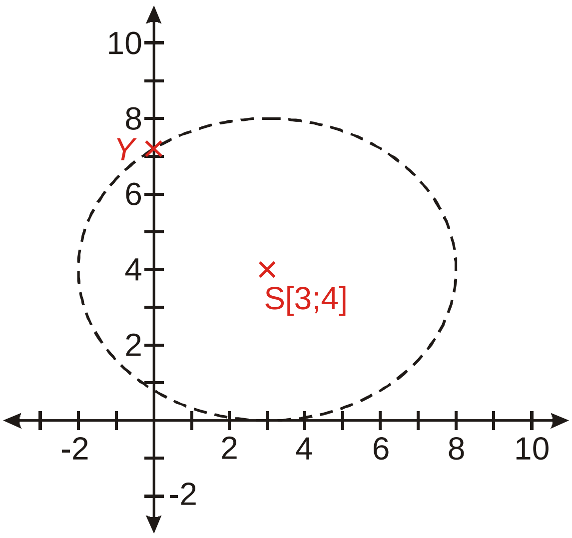
Odstraníme absolutní hodnoty.

V intervalu $x \in \langle -2; 2 \rangle$ platí: $\left|\frac{x}{2}+2\right| = \frac{x}{2}+2$ $\qquad \left|\frac{x}{2}-2\right| = -\left(\frac{x}{2}-2\right) = 2-\frac{x}{2}$

Dosadíme: $\left|\frac{x}{2}+2\right| + \left|\frac{x}{2}-2\right| = \frac{x}{2}+2+2-\frac{x}{2} = 4 = 2a$.

Př. 5: Napiš rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed v bodě $S[3;4]$, dotýká se osy x a osu y protíná v bodě $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$.

Nakreslíme si obrázek:



Z obrázku je zřejmé, že elipsa se osy x musí dotýkat v bodě $X[3;0]$, který je jedním z vrcholů elipsy $\Rightarrow$ $b = |SX| = 4$.

Rovnice elipsy má tvar: $\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$.

Zbývá určit jediný koeficient, stačí dosadit bod $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$ a koeficient dopočíst:

$$\frac{(0-3)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{36}{5}-4\right)^2}{16} = 1 \quad / \cdot 16a^2$$

$$16 \cdot 9 + a^2\left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16a^2 \quad / \cdot \frac{25}{16}$$

$$25 \cdot 9 + 16a^2 = 25a^2$$

$$25 \cdot 9 = 9a^2$$

$$a^2 = 25$$

Rovnice elipsy: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ $\Rightarrow$ hlavní poloosa $a = 5$.

Př. 6: Petáková:
strana 125/cvičení 27
strana 125/cvičení 30

strana 125/cvičení 31
strana 125/cvičení 33
strana 125/cvičení 38
strana 125/cvičení 40

Shrnutí: Při hledání elips (je jednodušší než hledání kružnic) je nejpřínosnější si pamatovat, že osy elips jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a je možné z nich snadno získat velikosti poloos.